الخميس 2015/11/26

السابعة

ملاحظة:
من أجل اختيار تجزئة للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & \quad x = 0. \end{cases}$$

نضع: نعرها:

$\frac{\pi}{2x} = n\pi \Rightarrow x = \frac{1}{2n} \rightarrow$ أول نقطة بالتجزئة

$P = \{a = 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, x_n = 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

ليست مستمرة حيث ليس لها نهاية لدراسة النهاية عن طريق المتتاليات:

$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n}$

$|x_n - y_n| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon .$

- نعرها $x = \frac{1}{n\pi} \Leftarrow \frac{1}{x} = n\pi$

$x_1 = \frac{(2)1}{(2)n\pi}$, $x_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi}$, ...

حيث نريد ظهور 2π .

ملاحظة:
في تكامل ستيلجس للدالة f بالنسبة لـ g على $[a, b]$ يتحقق:

$$L \leq S(f, g; P) \leq U$$

نتابع في حالات وجود التكامل الكافية وذلك عندما تكون إحدى الدوال محدودة التغير والأخرى مستمرة.

شرط (2) مبرهنة (2):

إذا كان: $f \in C_{[a,b]}$, $g \in BV_{[a,b]}$
فإن التكامل يكون موجوداً وعندها نحقق كل من المتراجحتين:

1) $\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \le \max_{a\le x\le b}|f| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$ (T_1)

2) $|S(f,g;P)-J| < \varepsilon \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$; $J=\int_a^b f\,dg$. (T_2)

المتراجحة الأخيرة تبين لنا جودة (أفضلية) تقريب تكامل ستيلجس من مجموع S
$\lim S = J$.

ملاحظة:
المطلوب امتحانياً فقط المتراجحة الأولى ص 72 الأولى
شم 3) <مبرهنة 3>:
اذا كان التكامل: $\int_a^b f\,dx$ موجوداً حسب مفهوم ريمان
على الفترة $[a,b]$ و g تحقق شرط ليبشتز.
بالثابتة $0<k$ والذي هو:
$|g(x'')-g(x')| \le k(x''-x')$; $a\le x' < x'' \le b$
عندها يكون التكامل:
$\int_a^b f\,dg$ موجوداً.

شم 4 <مبرهنة 4>:
اذا كانت f مكولة ريمانياً على الفترة $[a,b]$ وكانت g تكتب بالشكل:
$g(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\,dt$.
أي أن g كتبت على شكل تكامل كدالة في حده الأعلى x حيث أن
$\int_a^b |\varphi(t)|\,dt \rightarrow$ موجود
أي φ مكولة بالإطلاق عندها يكون $\int_a^b f\,dg$ موجود حيث $a < x \le b$.

ملاحظة:
يمكننا اضافة ما يلي إلى خواص تكامل ستيلجس:
أ) اذا كانت f مكولة بالنسبة لـ g على $[a,b]$ حسب ستيلجس عندئذ تكون كل
من $|f|$, f^2 مكولتان حسب ستيلجس بالنسبة للدالة g على $[a,b]$.
على اعتبار أن الدالة g متزايدة عليه وتصح المتراجحة:
$\left|\int_a^b f\,dg\right| \le \int_a^b |f|\,dg$.

مثال:

لتكن لدينا دالة ديرخليه المعرفة بالشكل:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & ; \quad x \in [0,1] \cap \tilde{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

$\tilde{\mathbb{Q}}$ غير عدودة حيث يمكن مقابلتها مع $\mathbb{R}$ ولا يمكن مقابلتها مع $\mathbb{N}$ وبما أن

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \tilde{\mathbb{Q}}$ ⟸ غير

(غير ، عدودة)

من الدالة: $g(x) = x$ متزايدة على $[a,b]$.

$|\varphi(x)| \leq 1 ; \quad x \in [0,1]$

نلاحظ أن دالة ديرخليه ليست تكون حسب مفهوم ستيلجس بالنسبة للدالة $g(x) = x$ على الفترة $[0,1]$ حسب ستيلجس وهذا ما أوضحناه سابقاً إلا أن القيمة المطلقة لدالة ديرخليه وهي $|\varphi(x)| = 1$ تكون بالنسبة لـ $g(x) = x$ على $[0,1]$ حسب ستيلجس.

ومنه:

$$\int_a^b |\varphi(x)| \, dg(x) = \int_0^1 1 \, dx = 1$$

ب) نفرض أن g دالة متزايدة بإطراد على $[a,b]$ فإن:

$f_2 \leq f_1(x) \; ; \; \forall$

وكان كل من التكاملين $\int_a^b f_1 dg$, $\int_a^b f_2 dg$ موجوداً فإن:

$$\int_a^b f_2 \, dg \leq f_1 \, dg.$$

ملاحظة:

لتكن $g \in C_{[a,b]}$ ولها مشتقة g' باستثناء (ماعدا) عدد منته من النقاط على هذه الفترة والمشتقة g' تكامل ريمانياً على الفترة $[a,b]$ عندئذٍ:

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) \, dt$$

فإذا كان:

$$\int_a^b |g'(t)| \, dt$$

موجوداً ومحدوداً فإنه يمكننا تطبيق الشرط (4) على الدالة g.

5) طرق حساب تكامل ستيلجس:

سنبين الآن كيف يمكننا ارجاع حساب تكامل ستيلجس إلى حساب تكامل ريمان:
ولكن دوماً قبل الحساب علينا التأكد من وجوده على الفترة المعطاة.

مبرهنة (1) (ط):

اذا كانت $f \in C_{[a,b]}$ ولـ g مشتقاً g' محدود ومكمول ريمانياً فان التكامل

$J = \int_a^b f\,dg$ يكون موجود ويحسب عندها بالعلاقة:

$$I = (S)\int_a^b f\,dg = (R)\int_a^b f\cdot g'\,dx \quad \forall x \in [a,b] \quad (1)$$

حيث $dg = g'(x)\,dx$

محدود أي $\exists k \,;\, |g'| \le k \,;\, x \in]a,b[$ $[a,b]$

في هذه الطريقة نلاحظ أننا حولنا تكامل ستيلجس إلى ريمان.

مثال:

- تأكد من وجود التكامل التالي:

$$J = \int_0^1 x^3\, d(\arctan)$$

ثم احسبه في حال وجوده وفق الطريقة (1).

<u>الحل</u>: أولاً: الحديث عن وجود التكامل: لدينا:

$x^3 = f \in C_{[0,1]}$, $g'(x) = (\arctan)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

$x \in [0,1]$.

$$\Rightarrow |g'(x)| \le 1$$

ومكمول ريمانياً لأن g' مستمرة على $[0,1]$. اذاً جميع الشروط مستوفاة و التكامل موجود على $[0,1]$. ونحسبها حسب بالشكل:

$$g = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \ln(2)\right).$$

مثال (2): وظيفة

احسب التكامل:

$$J = \int_0^5 x^3\, d\left(\frac{1}{x+8}\right)$$

بعد التأكد من وجوده.

يمكننا تعميم الطريقة السابقة بالشكل:

ط$_2$ (مبرهنة 2):

اذا كانت f مكاملة ريمانيًا على $[a,b]$ و الدالة g تكتب بالصورة

$$g(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\, dt \;,\quad x \in [a,b].$$

حيث:

$\int_a^b |\varphi(t)|\, dt$ موجود ومحدود عندئذ يكون التكامل J:

موجودًا و يحسب بالعلاقة:

$$J = \int_a^b f\, dg = (R)\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx. \qquad (2)$$

- وكنتيجة من ذلك اذا كانت f مكاملة ريمانيًا على $[a,b]$

و g لها مشتق g' ما عدا في عدد منته من النقاط على $[a,b]$ بحيث يكون التكامل:

$$\int_a^b |g'(t)|\, dt$$

موجودًا ومحدودًا عندئذ يمكننا تصور g بالشكل:

$$g = g(a) + \int_a^x g'(t)\, dt \;,\quad x \in [0,1]$$

و J موجودًا و يحسب بالعلاقة:

$$J = \int_a^b f\, dg = (R)\int_a^b f \cdot g'(x)\, dx \qquad (2)'$$

حيث تكون الفترة $[a,b]$ مستقلة لا تتغير.

مثال:

تأكد من وجود التكامل ثم احسبه إذا وجدت

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\sin x$$

الحل: اولًا: وجوده:

الدالة $f \in C_{[a,b]} = [0, \frac{\pi}{2}]$ لذا فهي مكاملة ريمانيًا عليها ، g معرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$

وتكتب بالشكل:

$$g(x) = \sin x = \int_0^x \cos t\, dt$$

حيث $C = \sin a = \sin 0 = 0$

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

ما الدالة $g'(t) = \cos t$ مستمرة وغير سالبة على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وهذا يعني أن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| dt = 1 < \infty$$

موجود ومحدود و التكامل المرافق يكون موجود.

(حتى لو كان المجال مغلقاً نفس الكلام)

ونحسب عندئذٍ من إحدى العلاقتين (2) أو $(2)'$ بالطريقة السابقة

فنجد:

$$J = (S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\sin x = (R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

مثال: وظيفة.

أثبت أن التكامل $J = \int_{-1}^{1} x\, d(\arctan x) = 0$ بعد التأكد من وجوده.

وفق طريقة ② أو $②'$.

- في الطريقة التالية سنواجه أن للدالة g قفزات في عدد منتهٍ من نقاط الفترة $[a, b]$ ولكن للدالة g مشتق موجود وقد يكون هذا المشتق غير موجود في نقاط أخرى من الفترة ولكن عددها منتهٍ.

ط3) <مبرهنة 3>:

إذا كان $f \in C_{[a,b]}$ ولـ g نقاط انقطاع من النوع الأول هي:

$$c_0 = a < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < b = c_n$$

وبحيث يكون المشتق g' كمول ريمانياً على $[a, b]$، عندها يكون التكامل J موجوداً ونحسبه من ما يلي:

$$J = (S)\int_a^b f\, dg = (R)\int_a^b f\, g'(x)\, dx + f(a)[g(a+0) - g(a)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} f(c_k)[g(c_k + 0) - g(c_k - 0)]$$

$$+ f(b)[g(b) - g(b-0)] \quad (3)$$

مثال:

احسب قيمة التكامل التالي:

$$J = (S)\int_0^3 f(x)\, dg(x)$$

يبدأ لنا كرسم وجوده

$$f(x)=1 \quad , \quad g(x)=\begin{cases} 2 & ; \quad x=0 \\ x^2 & ; \quad 0<x\leq 2 \\ -1 & ; \quad 2<x<3 \\ 0 & ; \quad x=3 \end{cases}$$

هادا باطل

وذلك اعتماداً على طريقة (3).

لو كان المشتق = 0 بكل النقاط لكنا استخدمنا (4).

الحل: الوجود: لدينا $f=c \Rightarrow f \in C_{[a,b]}$.

كما أن g' هو:

$$g'(x)=\begin{cases} 2x ; & 0<x<2 \\ 0 ; & 2<x<3 \end{cases}$$

(باقي النقاط أصفار لا داعي لذكرها).

وهذا المشتق غير موجود في نقاط الانقطاع لذا يمكن حذفها من فترات تبدل المتغير x في عبارة g' وهو محدود ومكمول ريمانياً.

(إذا كان المشتق يمين x ≠ يسار يكون غير موجود عند هذه النقطة).

~~وبالتالي g'~~ $(x=2)$ نقطة انقطاع لـ g' (المشتق غير موجود فيها).

ملاحظة g نقاط انقطاع من نوع أول وهي فترات $x=0, x=2, x=3$

وهذا يعني حسب م 3 أن التكامل موجود على الفترة $[0,3]$ ونحسب:

$$J=(S)\int_0^3 f\,dg=(R)\int_0^3 1\, g'(x)\,dx+[g(0+0)-g(0)]$$

$$+f(2)[g(2+0)-g(2-0)]+f(3)[g(3)-g(3-0)]$$

$$=\int_0^2 1\,(2x)\,dx+1[0-2]+1[-1-4]+1[0+1]$$

$$=2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2-2-5+1=-2.$$

مثال: برهنة.

احسب التكامل التالي:

$$(S)\int_0^3 x^3\,d\,g(x)=J$$

حيث g الدالة السابقة بعد التأكد من وجوده ثم حاول حساب:

$$J = (S)^3 \int_0 g(x) \, d f(x).$$

عدنا الطريقة ① ② بالتجزئة.

- الطريقة القادمة وهي شبيهة حالة خاصة من طرق ③ وذلك عندما تأخذ g قيماً ثابتة فقط (كالدالة الدرجية) وعندها يكون:

$g'(x) = 0$ في كل النقاط.

(4 ط) (مبرهنة 4): تعتبر حالة من ③.

$f \in C_{[a,b]}$ و g تأخذ قيماً ثابتة على الفترات الجزئية:

$(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_{n-1}, b)$

اذا صممنا بعض الأطراف لا يؤثر.

حيث: $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1} < b = c_n$

نقاط انقطاع تكامل. عندئذ يكون J موجوداً ونحسبه بالعلاقة:

$$J = \int_a^b f \, dg = f(a) [g(a+0) - g(a)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} f(k) [g(c_k + 0) - g(c_k - 0)] +$$

$$f(b) [g(b) - g(b-0)] \quad (4)$$

مثال:

احسب:

$$J = \int_0^2 [x] \, d x^2$$

بعد التأكد من وجوده.

الحل: اذا أردنا حساب هذا التكامل فإننا سنقوم على حساب التكامل:

$$J_1 = \int_0^2 x^2 \, d[x]$$

لكن بعد التأكد من وجود الأول. وذلك باستخدام خاصية التكامل بالتجزئة.

الوجود: الدالة $f(x) = x^2 \in C_{[0,2]}$ والدالة $g(x) = [x]$

دالة متزايدة عليه لذا فالتكامل موجود ~~وجيدا~~ (J_1 موجب حسب خاصية التكامل بالتجزئة يكون g موجود ونحسبه: (بحيث استخدام عدة طرق)

$$J = \int_0^3 [x]\, d x^2 = ([x] - x^2)\Big|_0^2 - J_1$$

$(\int u\,dv = u.v - \int v\,du$ (استفدنا من

$$J = 2.2^2 - \{ (0)[\underline{g(0+0) - g(0)}] + (1).1 +$$

0 لعدم صحيح ليمين . ↙ قفزة الدرجية .

$$+ (2)^2 . 1 \} = 8 - [1+4] = 3.$$

↙ قفزة من يسار عند 2

مثال: مطبنة .

احسب قيمة التكامل:

$$J = \int_0^3 e^x \, d([x+3])$$

بعد التأكد من وجوده .

نلاحظ أن

$$[x+k] = [x] + k \qquad k \in \mathbb{Z}, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$\overset{*}{\mathbb{Z}} \ni n \quad [nx] \neq n[x]$$ لكن

$$\Rightarrow [x+3] = [x] + 3$$

$$\int e^x \, d[x] + \int e^x \, d3 .$$